

## РАЗДЕЛЕНИЕ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ПО ПОЛОЖЕНИЮ ИСТОЧНИКОВ

П.Н.Александров<sup>1</sup>  
<sup>1</sup>ЦГЭМИ ИФЗ РАН, alexandr@geo.igemi.troitsk.ru

---

### АННОТАЦИЯ

Рассматриваются теоретические вопросы использования метода магнитотеллурического зондирования (МТЗ) для целей пассивного электромагнитного мониторинга современных геодинамических процессов.

Поставлена задача выделения из электромагнитного поля, зарегистрированного на дневной поверхности, составляющей, связанной с экзогенными источниками (ионосферные токи, грозовые разряды и т.п.), и поля, связанного с эндогенными источниками, которые могут генерироваться необратимыми геодинамическими процессами в напряженно-деформированной литосфере, например, процессами трещинообразования.

На основе введения функции объема получено устойчивое в вычислительном плане решение прямой задачи МТЗ для слоистой, горизонтально-однородной произвольно анизотропной модели геоэлектрической среды с распределенными в ней источниками электромагнитного поля. При этом источники могут располагаться в произвольном месте слоистого полупространства со случайной амплитудой и временем появления. Это решение позволяет эффективно проводить прямое математическое моделирование электромагнитного поля, тем самым обеспечивая необходимую теоретико-вычислительную базу для постановки и решения обратной задачи пассивного электромагнитного мониторинга.

Показано, что электромагнитное поле, связанное с эндогенными источниками электромагнитного поля, в случае горизонтально слоистой модели среды входит аддитивным образом в импедансные соотношения, связывающие тангенциальные компоненты электрического поля и тангенциальные компоненты магнитного поля на дневной поверхности.

Ключевые слова: пассивный электромагнитный мониторинг, магнитотеллурическое зондирование

---

### ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия наблюдается повышение интереса к изучению сейсмоэлектромагнитных явлений, связанных с подготовкой землетрясений (Соболев, Пономарев, 2003). Предполагается, что в процессе разрушения горной породы формируется наиболее мощный источник электромагнитного поля, связанный с трещинообразованием. Эти эндогенные источники носят случайный характер как по ориентации, амплитуде, так и по времени появления и местоположению. В совокупности они могут создавать электромагнитное поле, которое может регистрироваться на дневной поверхности (Александров, 2009). Одним из методов исследования геоэлектрической среды является метод магнитотеллурических зондирований, в котором в качестве источника рассматривают теллурическое поле экзогенного происхождения. Однако при полевых измерениях регистрируются электромагнитные поля как экзогенного, так и эндогенного происхождения. Таким образом, появляется задача, связанная с теоретическим

обоснованием использования данных МТЗ для изучения современных геодинамических процессов. Прежде всего, данное обоснование связано с возможностью разделения электромагнитного поля, измеренного на дневной поверхности, на поля эндогенного и экзогенного происхождения.

Соответственно, основной задачей обработки данных МТЗ с целью изучения источников эндогенного происхождения является задача разделения поля по положению источников (Александров, 2015). Помимо этих источников, являющихся предметом изучения пассивного электромагнитного мониторинга современных геодинамических процессов (Александров, 1994), существенную роль играют ионосферные токи, которые являются основой метода магнитотеллурического зондирования для решения электроразведочных задач.

### **Вывод импедансных соотношений для горизонтально-слоистой модели с распределенными в ней источниками.**

Рассмотрим в терминах импедансов прямую задачу МТЗ, которая в свою очередь является обратной задачей электродинамики по

определению краевых условий (Ахтямов, 2009). Электромагнитное поле, в общем случае линейной неоднородной среды, подчиняется системе уравнений Максвелла, которая в частотной области имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \sigma \mathbf{E} + \alpha \mathbf{H} + \mathbf{J}^{ext}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -i\omega \mu \mathbf{H} + \beta \mathbf{E} + \mathbf{B}^{ext}. \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{H} = [H_x, H_y, H_z]^T$  – вектор напряженности магнитного поля,  $\mathbf{E} = [E_x, E_y, E_z]^T$  – вектор напряженности электрического поля;  $\mathbf{J}^{ext}$ ,  $\mathbf{B}^{ext}$  – вектора плотности стороннего электрического тока и сторонней индукции магнитного поля, соответственно, которые являются источниками электромагнитного поля;  $\omega$  – частота;  $i = \sqrt{-1}$  – мнимая единица;  $T$  – знак транспонирования. Электромагнитными параметрами неоднородной среды являются:  $\mu$  – магнитная проницаемость,  $\sigma$  – удельная электропроводность,  $\alpha, \beta$  – бианизотропные параметры (Александров, 2000). Эти параметры описывают наиболее общие линейные электромагнитные свойства среды и являются матрицами размерности  $3 \times 3$ . Они необходимы для максимально полного описания линейных электромагнитных свойств геоэлектрической среды. Наличие источников электромагнитного поля в геологической среде интерпретируется как характеристика геодинамической активности геологической среды (Соболев, 1973).

Рассмотрим горизонтально-однородную модель геоэлектрической среды. Введем декартовую систему координат  $x, y, z$ . Ось  $z$  направим вглубь земли. Для такой среды достаточно переформулировать систему уравнений Максвелла (1): исключая компоненты  $H_z$  и  $E_z$ , воспользоваться преобразованием Фурье по горизонтальным координатам относительно 4-х компонентного вектора  $\mathbf{X} = [H_x, H_y, E_x, E_y]^T$ , содержащего только тангенциальные компоненты электромагнитного поля (Александров, 2001), и, следовательно, непрерывного на границе раздела сред. В этом случае, уравнения Максвелла будут иметь вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{X} = A \mathbf{X} + \mathbf{J} \delta(z - z_j), \quad (2)$$

где  $A$  – матрица, включающая параметры среды, пространственные ( $k_x, k_y$ ) и временную  $\omega$  частоты;  $\mathbf{J} = \mathbf{I}_j e^{i(k_x x_j + k_y y_j + \omega t_j)}$  – вектор сторонних источников электромагнитного поля с номером  $j$ , амплитудой  $\mathbf{I}_j$ , сосредоточенный

в точке с координатами  $x_j, y_j, z_j$ ;  $\delta$  – дельта-функция Дирака (Кеч, Теодореску, 1978). Источник появляется в момент времени  $t_j$ .

Решение системы уравнений (2) в однородной среде выражается через экспоненту от матрицы (Гантмахер, 2004) и в данном случае имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= e^{Az} \mathbf{C} + \\ &\int_{-\infty}^{\infty} [S e^{\lambda_+(z-z')} U(z-z') S^{-1} - S e^{\lambda_-(z-z')} U(z'-z) S^{-1}] \mathbf{J}(z') dz' = \\ &e^{Az} \mathbf{C} + \mathbf{X}^f(z), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{C}$  – постоянный вектор;  $S$  – матрица, составленная из собственных векторов матрицы  $A = S \lambda S^{-1}$ ,  $\lambda = \begin{pmatrix} e^{\lambda_- z} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_+ z} \end{pmatrix}$ ;  $\lambda_-, \lambda_+$  –

диагональные матрицы собственных значений матрицы  $A$  с действительными частями меньшими и большими нуля, соответственно,  $0$  – нулевые матрицы размерностью  $2 \times 2$ ;  $\mathbf{X}^f$  – вектор первичного поля. Продолжение поля  $\mathbf{X}$  с кровли слоя с координатой  $z_l$  на подошву с координатой  $z_{l+1} = z_l + h_l$  имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(z_{l+1}) &= \\ e^{A_l h_l} \mathbf{X}(z_l) - e^{A_l h_l} \mathbf{X}^p(z_l) + \mathbf{X}^f(z_{l+1}) &= \\ e^{A_l h_l} \mathbf{X}(z_l) + \mathbf{Y}_l & \end{aligned}$$

Используя это выражение, найдем продолжение поля через слоистую среду с количеством слоев, равное  $n$

$$\mathbf{X}(z_n) = \mathbf{X}_n = \prod_{l=1}^{n-1} e^{A_l h_l} \mathbf{X}_0 + \sum_{l=1}^{n-1} \prod_{k=1}^l e^{A_k h_k} \mathbf{Y}_l, \quad (3)$$

где  $\mathbf{X}_0$  – поле на кровле слоистого разреза.

Представим общее решение для поля в слое бесконечной толщины с номером  $n$  в виде суммы убывающего  $\mathbf{X}^-$  и возрастающего  $\mathbf{X}^+$  полей при  $z \rightarrow +\infty$ :  $\mathbf{X}^n(z) = \mathbf{X}^- + \mathbf{X}^+$ . Исходя из условий на бесконечности, необходимо положить  $\mathbf{X}^+ = 0$ , откуда следует

$$S \begin{pmatrix} [0] & [0] \\ [0] & e^{\lambda_+ z} \end{pmatrix} S^{-1} \mathbf{X}^n(z) = 0, \quad [0] - \text{нулевая матрица.}$$

Отсюда, при  $z \rightarrow z_n + 0$ , получим

$$\begin{aligned} SBS^{-1} \mathbf{X}^n(z_n) &= SBS^{-1} \left[ \prod_{l=1}^{n-1} e^{A_l h_l} \mathbf{X}_0 + \sum_{l=1}^{n-1} \prod_{k=1}^l e^{A_k h_k} \mathbf{Y}_l \right] = \\ &= D \mathbf{X}_0 + \mathbf{Y}_0 = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \mathbf{X}_0 + \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} = 0, \end{aligned}$$

где  $B$  – диагональная матрица, с диагональными элементами, равными единице для собственных значений, больших нуля, и с диагональными элементами, равными нулю для собственных значений, меньших нуля.

Из этого выражения получим связь между тангенциальными компонентами электрического  $\mathbf{E}_0$  и магнитного  $\mathbf{H}_0$  полей на поверхности слоистого разреза

$$\mathbf{E}_0 = -d_{11}^{-1}d_{12}\mathbf{H}_0 + d_{11}^{-1}\mathbf{Y}_1 = -d_{21}^{-1}d_{22}\mathbf{H}_0 + d_{21}^{-1}\mathbf{Y}_2 = \mathbf{Z}\mathbf{H}_0 + \mathbf{Y} \quad (4)$$

Таким образом, из условия убывания электромагнитного поля на бесконечности получена линейная связь между тангенциальными компонентами электромагнитного поля, зарегистрированными на поверхности нижнего слоистого полупространства с распределенными в нем источниками электромагнитного поля вне зависимости от электромагнитных свойств верхнего полупространства и источников, расположенных там же. Выражение (4) противоречит теории Тихонова-Каньяра (Бердичевский, Дмитриев, 1992) в точности до наоборот, в том смысле, что магнитотеллурический импеданс зависит только от параметров верхнего полупространства в случае наличия источников в нижнем полупространстве. Рассмотрим этот парадокс более подробно. Для этого предположим, что верхнее полупространство является горизонтально слоистым и в нем также находятся источники электромагнитного поля, которые создают поле  $\mathbf{Y}^v$ . Тогда горизонтальные компоненты будут связаны соотношениями, аналогичными (4):

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{Z}^v\mathbf{H}_0 + \mathbf{Y}^v, \quad (5)$$

где  $\mathbf{Z}^v$  - импеданс верхнего полупространства. Найдем решение прямой задачи для всего слоистого пространства. Учитывая непрерывность полей  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{H}_0$  на границе двух полупространств, вычитая из равенства (4) выражение (5), получим  $0 = (\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^v)\mathbf{H}_0 + (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^v)$ , откуда

$$\mathbf{H}_0 = -(\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^v)^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^v) = ([1] - \mathbf{Z}^v\mathbf{Z}^{-1})^{-1}\mathbf{Z}^v\mathbf{Z}^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^v). \quad (6)$$

Для электрического поля аналогично получим

$$\mathbf{E}_0 = (\mathbf{Z}^{-1} - \mathbf{Z}^{v-1})^{-1}(\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{Y} - \mathbf{Z}^{v-1}\mathbf{Y}^v) = ([1] - \mathbf{Z}\mathbf{Z}^{v-1})^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{Z}\mathbf{Z}^{v-1}\mathbf{Y}^v). \quad (7)$$

Таким образом, решена прямая задача геоэлектрики для слоистого пространства с находящимися в нем источниками электромагнитного поля в терминах импедансов верхнего и нижнего полупространств.

Рассмотрим задачу разделения поля по положению источников при магнитотеллурических исследованиях в случае горизонтально слоистой модели среды. В практике МТЗ находят линейную связь между тангенциальными компонентами электромагнитного поля, зарегистрированными

на дневной поверхности через кажущийся импеданс  $Z_0$ .

При нахождении кажущегося импеданса  $Z_0$  по экспериментальным данным из выражения  $\mathbf{E}_0 = Z_0\mathbf{H}_0$  с использованием полученных решений (6) и (7), получается система уравнений вида:

$$(\mathbf{Z}^{-1} - \mathbf{Z}^{v-1})^{-1}(\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{Y} - \mathbf{Z}^{v-1}\mathbf{Y}^v) = -Z_0(\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^v)^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^v),$$

при этом  $Z_0$  будет зависеть от местоположения источников.

Последнее выражение можно переписать в следующем виде:

$$(Z_0\mathbf{Z}^{v-1} - [1])(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^{v-1} - [1])^{-1}\mathbf{Y} = (Z_0\mathbf{Z}^{-1} - [1])([1] - \mathbf{Z}^v\mathbf{Z}^{-1})^{-1}\mathbf{Y}^v,$$

из которого следует, что в случае отсутствия источников в нижнем полупространстве, то есть при  $\mathbf{Y} = 0$ , кажущийся импеданс будет равен импедансу нижнего полупространства  $Z_0 = Z$ . Наоборот, если в верхнем полупространстве источники отсутствуют, то есть  $\mathbf{Y}^v = 0$ , то кажущийся импеданс будет равен импедансу верхнего полупространства  $Z_0 = Z^v$ .

Таким образом, полученный вывод обобщает на случай слоистой анизотропной и бианизотропной модели геоэлектрической среды известный вывод, вытекающий из модели Тихонова-Каньяра о зависимости импеданса от электромагнитных параметров нижнего полупространства для источников, находящихся в верхнем полупространстве, и наоборот.

Следовательно, уравнение (4) имеет место и на его основе можно построить систему обработки данных МТЗ с целью изучения геодинамической активности геологической среды. Для этого необходимо знать импеданс нижнего полупространства  $Z$ , который можно найти в период геодинамического затишья.

Отсюда следует постановка обратной задачи пассивного электромагнитного мониторинга современных геодинамических процессов: по известному импедансу нижнего полупространства  $Z$  найти электромагнитное поле источников, находящихся в нижнем полупространстве из уравнения

$$\mathbf{Y} = \mathbf{E}_0 - \mathbf{Z}\mathbf{H}_0. \quad (8)$$

Это уравнение будет иметь место при любых источниках, находящихся в верхнем полупространстве и, соответственно, при любых параметрах слоистого (при чем, не обязательно слоистого) верхнего полупространства. По этому полю, зарегистрированному и вычисленному на дневной поверхности, ставится задача определения местоположения области разрушения горной породы и количественной оценки интенсивности этих

процессов.

Также имеет место и уравнение (5). Тогда для изучения источников в верхнем полупространстве необходимо знать импеданс верхнего полупространства  $Z^v$ . Для изучения источников в верхнем полупространстве необходимо использовать уравнение

$$Y^v = E_0 - Z^v H_0. \quad (9)$$

Уравнения (8) и (9) позволяют решить задачу о разделении электромагнитного поля, зарегистрированного на дневной поверхности, по положению источников.

Таким образом, получены импедансные соотношения для горизонтально-слоистой модели геоэлектрической среды с распределенными в ней источниками электромагнитного поля, которые являются решением обратной задачи на определение краевых условий. При этом импеданс слоистого разреза  $Z$  не зависит от источников электромагнитного поля, а электромагнитное поле, связанное с источниками в слоистой среде входит аддитивным образом в импедансное соотношение.

Изложенный выше способ решения прямой задачи МТЗ для горизонтально слоистой среды на основе продолжения поля не обладает устойчивостью в вычислительном плане. Это связано с тем, что в выражение (3) входит экспонента от матрицы. Действительные части собственных значений матрицы  $A$  могут быть как положительными, так и отрицательными. В случае положительных собственных значений при увеличении толщины слоя появляется растущая экспонента, что приводит к неустойчивости полученного решения.

Для эффективного практического решения прямой задачи МТЗ для случая горизонтально-слоистой среды с распределенными в ней источниками электромагнитного поля необходим устойчивый алгоритм решения этой задачи.

### Выводы

Получено решение прямой задачи МТЗ для слоистого пространства, выражающееся через импедансы верхнего и нижнего полупространств и полей от источников, находящихся в соответствующих областях пространства.

С использованием продолжения электромагнитного поля через горизонтально слоистую среду определено выражение, показывающее связь между тангенциальными компонентами электромагнитного поля, зарегистрированными на дневной поверхности. При этом магнитотеллурический импеданс зависит только от электромагнитных параметров геоэлектрической среды. Поле от источников, находящихся в слоистом пространстве, входит аддитивным образом в

эту связь (уравнения (8) и (9)). Однако подход к решению прямой задачи МТЗ для горизонтально слоистой среды на основе продолжения поля не обладает устойчивостью в вычислительном плане. С другой стороны, устойчивое решение аналогичной задачи не позволяет установить эту аддитивную связь, но позволяет получить устойчивый алгоритм решения прямой задачи МТЗ с распределенными в горизонтально слоистой модели геологической среды источниками электромагнитного поля. Такое решение позволяет перейти к рассмотрению обратной задачи пассивного электромагнитного мониторинга - определению местоположения области геосреды, в которой протекают необратимые геодинамические процессы, и оценка их интенсивности. При этом, при получении решения использовался оригинальный подход, связанный с введением функции объёма изучения среды.

Таким образом, важнейшим результатом настоящего исследования является вывод импедансного соотношения с учетом эндогенных источников электромагнитного поля. Электромагнитное поле эндогенного происхождения входит аддитивным образом в импедансные соотношения. Магнитотеллурический импеданс  $Z$  не зависит от эндогенных источников электромагнитного поля. Это позволяет проводить эффективную обработку магнитотеллурических данных по выделению полей эндогенных источников из наблюдаемых в магнитотеллурике электромагнитных полей.

### Литература

1. Соболев ГА, Пономарев АВ, 2003, Физика землетрясений и предвестники. М.: Наука, 270 с.
2. Александров ПН, 2009, К теории сейсмического и электромагнитного мониторинга современных геодинамических процессов. "Вестник КРАУНЦ. Науки о Земле», № 2. Вып. 14. – с.49-58.
3. Александров ПН, 2015, Разделение зарегистрированного на дневной поверхности электромагнитного поля по положению источников. - Глобальная электрическая цепь: материалы Второй Всероссийской конференции / Геофизическая обсерватория "Борок" - филиал Института физики Земли им О.Ю.Шмидта РАН - Ярославль: Филигрань - с.6-7.
4. Александров ПН, 1994, Теоретические и методические основы электромагнитного мониторинга современных геодинамических процессов. Дис. канд. геол.-мин. наук. Саратов, Саратовский госуниверситет. 124с.
5. Ахтямов АМ, 2009, Теория идентификации краевых условий и её приложения. М.: Физматлит, 272 с.

6. Александров ПН, 2000, Эффективные электромагнитные параметры капиллярной системы электропроводности горной породы. - Физика Земли, №2, с.87-94.
7. Соболев ГА, 1973, Перспективы оперативного прогноза землетрясений по электротеллурическим наблюдениям // Предвестники землетрясений. № 5498. С.172–185.
8. Александров ПН, 2001, Прямая задача геоэлектрики в одномерных бианизотропных средах. – Физика земли, №4. – с51-61.
9. Кеч В, Теодореску П, 1978, Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. - М.:Мир - 518с.
10. Гантмахер ФР, 2004, Теория матриц.- 5-е изд.— М.: ФизМатЛит - 560 с.
11. Бердичевский МН, Дмитриев ВИ, 1992, Магнитотеллурическое зондирование горизонтально-однородных сред. - М.: Недра, - 250с.